

توان

به نام خدا

وارد فصل هفتم کتاب شدیم، یعنی فصل توان و جذر

در این جلسه میفوییم درباره اعداد تواندار و ضرب و تقسیم اونها با هم صحبت کنیم.

قبل از اینکه درس رو شروع کنیم، مبحث توان رو که سال گذشته یاد گرفتیم یه مرور کوتاه بکنیم.

اعداد تواندار به صورت زیر نوشته میشن.

توان

پایه

مثلا وقتی میگی 5^4 ، یعنی ۵ رو ۴ بار در خودش ضرب کنیم. بصورت زیر :

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

توجه داشته باشید، "توان" نشوندهنده تعداد دفعاتی هست که پایه در خودش ضرب

میشه.

چند تا مثال ببینیم .

عدهای تواندار زیر رو به صورت گسترده بنویسید:

$$6^4, 3^6, (-1)^5, \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

6^4 یعنی چی؟ یعنی ۶ به تعداد ۴ بار در خودش ضرب بشه:

$$6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6$$

3^6 یعنی چی؟ یعنی ۳ به تعداد ۶ بار در خودش ضرب بشه:

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$(-1)^5$ یعنی چی؟ یعنی -۱ به تعداد ۵ بار در خودش ضرب بشه:

$$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$ یعنی چی؟ یعنی $\frac{2}{3}$ به تعداد ۳ بار در خودش ضرب بشه:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

ضرب اعداد تواندار:

اعداد تواندار رو در دو حالت می‌تونیم در هم ضرب کنیم:

الف: ضرب اعداد تواندار با پایه های مساوی

ب: ضرب اعداد تواندار با توانهای مساوی

حالت الف رو بررسی می‌کنیم:

اگه دو عدد تواندار با پایه های مساوی در هم ضرب بشن جواب به چه صورتی میشه؟

یکی از پایه ها رو می‌نویسیم و **توانها رو با هم جمع** می‌کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

چند تا مثال ببینیم:

$$2^5 \times 2^7 =$$

اینجا پایه ها با هم برابرند، یکی از پایه ها رو می نویسیم (یعنی ۲) و توانها رو با هم جمع می کنیم:

$$2^5 \times 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{6+4} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$$

حالت ب: ضرب اعداد تواندار با توانهای مساوی

در این حالت یکی از توانها رو می نویسیم و پایه ها رو در هم ضرب می کنیم.

مثال:

$$x^3 \times y^3 =$$

اینجا توانها برابر هستن پس یکی از توانها رو می نویسیم و پایه ها رو در هم ضرب می کنیم:

$$x^3 \times y^3 = (xy)^3$$

یه مثال دیگه:

$$5^8 \times 3^8 = (5 \times 3)^8 = 15^8$$

یه مطلب دیگه هم در مورد اعداد تواندار باید بلد باشیم اینه که :

وقتی یه عدد تواندار به توان میرسه، توانها در هم ضرب میشن. یعنی:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

مثال:

$$(7^3)^2 =$$

در اینجا عدد 7^3 به توان ۲ رسیده، پس توانها رو در هم ضرب می‌کنیم:

$$(7^3)^2 = 7^{3 \times 2} = 7^6$$

یه مثال دیگه:

$$(18^2)^7 = 18^{2 \times 7} = 18^{14}$$

حالا با توجه به این سه تا مطلب که یاد گرفتیم می‌تونیم مثالهای متنوع تری حل کنیم:

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت اعداد تواندار بنویسید:

$$8^5 \times 2^4 =$$

ما ضرب رو فقط در دو حالت یاد گرفتیم، یا پایه‌ها با هم برابر باشن یا توانها.

ولی اینجا نه پایه‌ها برابرن نه توانها 😞

هر وقت سوال اینطوری داشتیم هتما یا باید پایه رو تغییر بدیم یا توان رو، که به یکی از دو حالت بالا تبدیل شه. در اینجا می‌دونیم:

$$8 = 2^3$$

پس به جای ۸ این مقدار رو قرار میدیم:

$$8^5 \times 2^4 = (2^3)^5 \times 2^4 =$$

حالا باید $(2^3)^5$ رو ساده کنیم، عدد تواندار به توان رسیده، پس باید توانها رو در هم ضرب کنیم:

$$(2^3)^5 = 2^{3 \times 5} = 2^{15}$$

این مقدار رو جایگزین می‌کنیم:

$$8^5 \times 2^4 = (2^3)^5 \times 2^4 = 2^{15} \times 2^4 =$$

حالا تبدیل شد به ضرب دو عدد تواندار با پایه های مساوی، یکی از پایه ها رو می‌نویسیم و توانها رو با هم جمع می‌کنیم:

$$8^5 \times 2^4 = (2^3)^5 \times 2^4 = 2^{15} \times 2^4 = 2^{15+4} = 2^{19}$$

مثال بعد:

$$(ab)^5 \times a^3 \times b^4 =$$

اینجا هم نه پایه برابر داریم نه توان برابر، پس باید ساده کنیم.

توانی که بالای پرانتز هست متعلق به همه عضوای داخل پرانتز، یعنی:

$$(ab)^5 = a^5 \times b^5$$

اینو جایگزین می‌کنیم:

$$(ab)^5 \times a^3 \times b^4 = a^5 \times b^5 \times a^3 \times b^4 =$$

حالا دو تا عددی که پایه شون a هست رو در هم ضرب می‌کنیم و دو عددی که پایه شون b هست رو در هم:

$$a^5 \times b^5 \times a^3 \times b^4 = a^{5+3} \times b^{5+4} = a^8 \times b^9 = a^8 b^9$$

چند تا مثال دیگه با هم ببینیم:

بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

بیست و هفت برابر عدد 9^5 به صورت زیر نوشته میشه:

$$27 \times 9^5 =$$

ما این ضرب رو به این صورت نمی‌تونیم انجام بدیم، چون نه پایه‌ها با هم برابرند نه توانها. باید کاری کنیم که پایه‌ها با هم برابر بشن:

$$27 = 3^3$$

از طرفی ۹ برابره با:

$$9 = 3^2$$

حالا این مقادیر رو جایگزین میکنیم:

$$27 \times 9^5 = 3^3 \times (3^2)^5 = 3^3 \times 3^{2 \times 5} = 3^3 \times 3^{10}$$

حالا ضرب دو تا عدد با پایه‌های مساوی رو داریم، بنابراین:

$$3^3 \times 3^{10} = 3^{3+10} = 3^{13}$$

مثال بعد:

حاصل $2^7 + 2^7$ و حاصل $3^5 + 3^5 + 3^5$ را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

چند تا 2^7 داریم؟ ۲ تا. یعنی:

$$2^7 + 2^7 = 2 \times 2^7 = 2^{1+7} = 2^8$$

می‌دونیم عددی که توان نداره در واقع توانش ۱ هست

چند تا 3^5 داریم؟ ۳ تا. یعنی:

$$3^5 + 3^5 + 3^5 = 3 \times 3^5 = 3^{1+5} = 3^6$$

حل تمرین صفحه ۱۰۴

توان

تمرین



۱- حجم مکعبی به ضلع ۸cm را به صورت یک عدد توان دار بنویسید که پایه آن عدد ۲ باشد.

حجم مکعب چطوری به دست میاد؟

$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم مکعب}$$

طول و عرض و ارتفاع در این مکعب برابر ۸ هست. بنابراین:

$$\text{حجم مکعب} = 8 \times 8 \times 8 = 8^3$$

جواب 8^3 شد، ولی از ما خواسته شده که جواب رو طوری بنویسیم که پایه برابر ۲ باشه. برای این کار ۸ رو به صورت زیر می نویسیم:

$$8 = 2^3$$

حالا این مقدار رو جایگزین می کنیم:

$$8^3 = (2^3)^3$$

عدد تواندار وقتی به توان میرسه باید توانها در هم ضرب بشن:

$$8^3 = (2^3)^3 = 2^{3 \times 3} = 2^9$$

ادامه تمرینها رو می تونید در " کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال " ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ازمین کانال مراجعه کنید.

تقسیم اعداد تواندار:

ضرب اعداد تواندار رو در دو حالت یاد گرفتیم، حالا می‌فوییم تقسیم دو عدد تواندار رو یاد بگیریم.

تقسیم اعداد تواندار رو هم در ۲ حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: تقسیم اعداد تواندار با پایه های مساوی

حالت دوم: تقسیم اعداد تواندار با توان های مساوی

تقسیم اعداد تواندار با پایه های مساوی:

در این حالت، یکی از پایه ها رو می‌نویسیم و توانها رو از هم کم می‌کنیم.

مثال:

$$8^9 \div 8^5 =$$

در اینجا پایه ها با هم برابرند و توانها متفاوت، پس یکی از پایه ها رو می‌نویسیم و توانها رو از هم کم می‌کنیم:

$$8^9 \div 8^5 = 8^{(9-5)} = 8^4$$

مثال بعد:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2 =$$

پایه ها برابرند، یکی از پایه ها رو می‌نویسیم و توانها رو از هم کم می‌کنیم:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{5-2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^3$$

مثال بعد:

$$\frac{3^7}{3^3} =$$

می‌دونیم که فقط کسری یعنی تقسیم، پس مقدار داده شده برابر با:

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^7 - 3^3 =$$

تقسیم با پایه های برابر رو داریم، بنابراین:

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^7 - 3^3 = 3^{7-3} = 3^4$$

مثال بعد:

$$(xy)^7 \div (xy)^4 =$$

پایه ها برابر، بنابراین:

$$(xy)^7 \div (xy)^4 = (xy)^{(7-4)} = (xy)^3$$

تقسیم اعداد تواندار با توانهای مساوی:

در این حالت یکی از توانها رو می‌نویسیم و پایه ها رو بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال:

$$(5)^7 \div (3)^7 =$$

در اینجا می‌بینیم که توانها با هم برابر، پس یکی از توانها رو می‌نویسیم و پایه ها رو بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$(5)^7 \div (3)^7 = (5 \div 3)^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^7$$

مثال بعد:

$$(14)^3 \div (7)^3 = (14 \div 7)^3 = 2^3$$

مثال:

نصف 2^9 را به صورت عدد تواندار بنویسید.

برای به دست آوردن نصف یک عدد، باید اون رو بر ۲ تقسیم کنیم:

$$2^9 \div 2 =$$

تقسیم دو عدد با پایه های مساوی رو داریم، پس یکی از پایه ها رو می نویسیم و توانها رو از هم کم می کنیم:

$$2^9 \div 2 = 2^{9-1} = 2^8$$

مثال:

ربع 4^7 را به صورت عدد تواندار بنویسید.

برای به دست آوردن ربع یک عدد، باید اون رو بر ۴ تقسیم کنیم:

$$4^7 \div 4 =$$

تقسیم دو عدد با پایه های مساوی رو داریم، پس یکی از پایه ها رو می نویسیم و توانها رو از هم کم می کنیم:

$$4^7 \div 4 = 4^{7-1} = 4^6$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست بیاورید:

$$\left(\frac{x^7}{x^3}\right)^5 =$$

اول عبارت داخل پرانتز رو مناسبه می‌کنیم و بعد به توان می‌رسونیم. داخل پرانتز، تقسیم دو عدد با پایه های مساوی داریم:

$$\frac{x^7}{x^3} = x^7 \div x^3 = x^{7-3} = x^4$$

حالا این مقدار رو جایگزین می‌کنیم:

$$\left(\frac{x^7}{x^3}\right)^5 = (x^4)^5 =$$

در ابتدای درس یاد گرفتیم وقتی به عدد تواندار به توان میرسه، باید توانها رو در هم ضرب کنیم:

$$\left(\frac{x^7}{x^3}\right)^5 = (x^4)^5 = x^{4 \times 5} = x^{20}$$

مثال:

حاصل عبارت زیر را به صورت عددی تواندار بنویسید.

$$\frac{5^6 \times 6^3}{5^4 \times 6^5} =$$

یه روش ساده برای حل این مدل سوالها:

دو تا عددی که پایه مساوی دارن رو در نظر می‌گیریم و بعد:

گام ۱: عددی که توانش کوچکتر هست رو فط می‌زنیم.

گام ۲: توان بزرگتر رو منهای توان کوچکتر می‌کنیم.

در اینجا 5^6 و 5^4 پایه های مساوی دارن، 5^4 که توانش کوچکتر هست رو فط میزنیم:

$$\frac{5^6 \times 6^3}{5^4 \times 6^5} =$$

توان 5^6 که بزرگتر هست رو منهای توان کوچک می کنیم:

$$\frac{5^{6-4} \times 6^3}{5^4 \times 6^5} =$$

نتیجه تا اینجا برابر میشه با:

$$\frac{5^{6-4} \times 6^3}{5^4 \times 6^5} = \frac{5^2 \times 6^3}{6^5}$$

حالا میریم سراغ دو عدد دیگه که پایه های مساوی دارن، یعنی 6^5 و 6^3 چون 6^3 توانش کوچکتره، فطش میزنیم:

$$\frac{5^2 \times 6^3}{6^5} =$$

توان 6^5 که بزرگتر هست رو منهای توان کوچک می کنیم:

$$\frac{5^2 \times 6^3}{6^{5-3}} =$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{5^2 \times 6^3}{6^{5-3}} = \frac{5^2}{6^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

ما برای اینکه با این روش آشنا شید این سوال رو توی چند مرحله حل کردیم ولی یه کم که تمرین کنید توی یه مرحله قابل انجامه، عددایی که توانهای کوچک دارن رو فط بزنید و توانهای بزرگ رو منهای توانهای کوچک کنید.

کل تمرین صفحه ۱۰۸

تقسیم اعداد تواندار

تمرین



۱- هر یک از عددهای زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

$$81 = \quad -8 = \quad 1024 = \quad -\frac{125}{729} = \quad \frac{1}{512} = \quad -\frac{1}{32} =$$

$$81 = 9^2 = 3^4$$

$$-8 = (-2)^3$$

$$1024 = 2^{10}$$

$$-\frac{125}{729} = -\frac{5^3}{9^3} = \left(-\frac{5}{9}\right)^3$$

$$\frac{1}{512} = \frac{1}{2^9} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$-\frac{1}{32} = -\frac{1}{2^5} = \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

۲- کدام عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟ توضیح دهید.

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4}$$

$$\left(\frac{5}{11}\right)^0 = 0$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \left(\frac{2}{7}\right)^4$$

$$10^3 \times 10^4 = 10^{12}$$

$$(-2)^3 \times (-2) = 16$$

دو‌دو بررسی می‌کنیم:

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4}$$

این قسمت اشتباهه، چون علامت منفی داخل پرانتزه و وقتی به توان ۲ برسه به

مثبت تبدیل میشه. بنابراین جواب صحیح به صورت زیره:

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

قسمت بعد:

$$\left(\frac{5}{11}\right)^0 = 0$$

نادرسته. هر عدد به توان صفر برابر همیشه با ۱. پس جواب صحیح به صورت زیره:

$$\left(\frac{5}{11}\right)^0 = 1$$

قسمت بعد:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

نادرسته. وقتی به عدد تواندار به توان میرسه، باید توانها رو در هم ضرب کنیم.

پس جواب صحیح به صورت زیره:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \times 5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$$

قسمت بعد:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \left(\frac{2}{7}\right)^4$$

درسته. هر عدد به توان صفر برابر همیشه با ۱. بنابراین:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$$

باگذاری می‌کنیم:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times 1 = \left(\frac{2}{7}\right)^4$$

قسمت بعد:

$$10^3 \times 10^4 = 10^{12}$$

نادرسته. برای ضرب اعداد تواندار با پایه‌های مساوی، پایه مشترک رو می‌نویسیم و توانها رو با هم جمع می‌کنیم. پس جواب صحیح برابره با:

$$10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$$

قسمت بعد:

$$(-2)^3 \times (-2) = 16$$

درسته. در ضرب اعداد تواندار با پایه‌های مساوی، پایه مشترک رو می‌نویسیم و توانها رو با هم جمع می‌کنیم. پس داریم:

$$(-2)^3 \times (-2) = (-2)^{3+1} = (-2)^4 = 16$$

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam8

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.